**مودول هایw-injective (تزریقی-w)و حلقه های نیمه موروثی w**

خلاصه

فرض کنید که R حلقه قابل تبدیل[[1]](#footnote-2) به حلقه مبادله ای دارای هویت باشد. و M دارای مودول[[2]](#footnote-3)R، انعکاسی[[3]](#footnote-4)-w باشد اگر  یک تورشن[[4]](#footnote-5)GV(تاب) برای هر Nمودول-w آزاد ازتورشن[[5]](#footnote-6)(بدون انحاء یا عاری از تاب)باشد. در این مقاله ما یک حلقه R را نیمه موروثی-wتعریف می کنیم اگر هر ایده آل نوع متناهی از R یک متغیر تصویری-wباشند. برای مشخص کردن حلقه های نیمه موروثی-w، ما مفهوم مودول های تزریقی[[6]](#footnote-7)-wرا بیان کرده و ویژگی های پایه ای این مودول های تزریقی-wرا بررسی می کنیم. با استفاده از این مفاهیم، می بینیم که R یک نیمه موروثی-wاست اگر و تنها اگر حلقه خارج قسمت کلی[[7]](#footnote-8)T(R)(حلقه دارای خارج قسمت کامل) از R یک حلقه منظم ون نیومن[[8]](#footnote-9) باشد و Rm یک حوزه ارزش گذاری (دامنه ارزیابی) برای هر ایده آلwحداکثر  باشد. همچنین نشان داده شده است که حلقه متصلR نیمه موروثی است اگر و تنها اگر R دامنه مضرب v پروفر [[9]](#footnote-10) باشد.

مقدمه

به طور کلی R به حلقه قابل تبدیل به هویت 1 و  به پوسته تزریقی( و یا پوش[[10]](#footnote-11)) از هر M مودول R مرتبط باشد و فرض کنید که عملیات و ، عملیات های کاملا شناخته شده در این حوزه ها هستند. برای واژه ها و نظریاتی که توضیح داده نشده است به 3. 14و 15 مراجعه کنید.

حوزه های تکثیر V (دامنه های مضرب v پروفر) توجه زیادی در مطالعات شده است، حوزه RPVMD نامیده می شود اگر هر غیر صفری به طور محدود به I ایده آل تبدل شود که t معکوس پذیر است، که ایده آل بخشی B وجود دارد که در آن R است و یا به طور معادل  است. یک سوال اصلی در این بین آن است که: چگونه می توانیم مطالعه مان را روی PVMID به حلقه های قابل تبدیل به مقسوم علیه های صفر [[11]](#footnote-12)بسط بدهیم. حداقل دو روش برای این کار وجود دارد. یکی از آنها جایگزین کردن قسمت خارج قسمت از حوزه R با حلقه کلی خارج قسمت  است تا  برای زیر A مودول فرعی R  تعریف کنیم. در این مورد، ما ایده آل های منظمی از R را در نظر می گیریم و نظریه حلقه های تکثیر v پروفر را برای هر ایده آل منظم ایجاد شده محدود از R که نسبت بهt معکوس پذیر است بررسی می کنیم (PVMR برای کوتاه). روش دیگر جایگزین کردن خارج قسمت یک حوزه R با حلقه  از کسر محدود شناخته شده از R است که  را برای A زیر مودول R از تعریف می کنیم در جاییکه  حلقه فرعی  است که شامل عناصر  با  برای همه  است. به یاد داشته باشید که I ایده آل از R، نیمه منظم[[12]](#footnote-13)نامیده می شود اگر غیر ایده آل ایجاد شده محدود B از I باشد که درآن  است. در نمونه دوم، ما باید ایده آل های نیمه منظم از R را در نظر بگیریم و نظریه حلقه های تکثیر V پروفر Q0 را برای ایده آل نیمه منظم از R که معکوس پذیر است بررسی کنیم. ( برای کوتاه )

همچون مفهوم مودول-w که در 22 آمده است ، ما از روش عملیات w روی حوزه ها استفاده میکنیم که برای حلقه های قابل تبدیل به مقسوم علیه صفر موثر است. فرض کنید که j ایده آل R باشد. همچون 22، J در اینجا ایده آل  نامیده می شود ( ایده آل GV برای کوتاه ) اگر J به طور محدود ایجاد شده باشد و همومورفیسم طبیعی  یک ایزومورفیسم باشد (مراجعه به 5) . به یاد داشته باشید که مجموعه  از ایده آل های GV یک سیستم تکثیر از ایده آل های R است.فرض کنید که M یک مودول R باشید. تعریف کنید:



بنابراین  یک زیرمودول از M است. هم اکنون M یک ‌خواهد بود. (GV آزاد از تورشن(پیچ خوردگی)[[13]](#footnote-14)) اگر  باشد. M مودول RGV- تورشن خواهد بود اگر و فقط اگر  باشد برای هر ایده آل w حداکثر ازR (مراجعه به 21). M مودول آزاد از تورشنGV،  نامیده می شود اگر برای هر داشته باشیم . سپس مودول های تصویری و مودول های انعکاسی مودول های w خواهند بود. در مقاله اخیر 23، نشان داده شده است که مودول های تخت[[14]](#footnote-15) ، مودول-wهستند. برای هر مودول آزاد از تورشنGV داریم :



که زیر مودولw از  شامل M می شود که پوش w از M نامیده می شود. مشخص است که مودول آزاد از تورشنGV از M یک مودول-wاست اگر و تنها اگر M باشد. به یاد داشته باشید که در زبان نظریه های تورشن، پوش W برای مودول همگام با پوش تزریقی  است که مرتبط با نظریه تورشن است که در آن مودول تورشن از مودول های تورشن GV و مودول های آزاد از تورشن است که مودول آزاد از تورشنGV نامیده می شود. بنابراین نظریه عملیات w پلی است که نظریه تورشن را به شدت با نظریه ایده آل تکثیر مرتبط می سازد.

نظریه مودول های تصویری-wو مودول های تخت w اولین بار در 16 مطرح شد زمانیکه R در این حوزه قرار داشت. در 20، نظریه مودول های تصویری-wبه حلقه های مبدل اختیاری بسط داده شد. به یاد داشته باشید که حلقه R نیمه موروثی نامیده می شود اگر هر ایده آل ایجاد شده محدود از R تصویری باشد. اندو (2) ثابت کرده است که حلقه R نیمه موروثی است اگر و تنها اگر حلقه کلی خارج قسمت[[15]](#footnote-16) ازR حلقه منظم  است و  حوزه ارزش گذاری برای ایده آل حداکثر از  است. مدل همچنین حلقه R را نیمه موروثیW تعریف می کنیم از ایده آل نوع محدود از Rتصویری-wباشد. این امر برگرفته شده از 20، قضیه 4.13 است که در آن حلقه نیمه موروثیw خاص  است و بنابراین یک PVMR است.

در این مقاله، ما مفهوم مودول های تزریقی-wرا معرفی می کنیم و ویژگی های آنان را بررسی می کنیم. همانطور که در معادله همولوژیکال کلاسیک بیان شده است، ما به کمک نظریه های ویژگی های سیستماتیک بالا به حلقه های نیمه موروثی-wمی پردازیم.

2. مقدمه

فرض کنید که M و N مودول های R باشند و فرض کنید که  یک هومومورفیسم باشد. پیرو 19، f یک مونومورفیسمw است (به ترتیب ایزومورفیسم w و اپیمورفیسم w است). اگر  یک مونومورفیسم باشد (به ترتیب اپیمورفیسم و ایزومورفیسم) برای هر ایده آل w حداکثر m از R توالی  از مودول ها را خواهیم داشت و هومومورفیسم w-exact(کامل) نامیده می شود اگر توالی  برای هر ایده آل w حداکثر از R دقیق است. در 16، مودول نوع محدود M به معنی مودول آزاد از تورشن با  است با زیر مودولی B از M که به صورت محدود ایجاد شده است.در 22، نظریه مودول های نوع محود به مودول های آزاد از تورشن GV اختصاص دارد. در 19 نظریه مودول های نوع محدود اصلاح می شود. M مودول R نوع متناهی خواهد بود اگر F مودول R آزاد محدود وجود داشته باشد و اپیمورفیسم wباشد :. به طور مشابه، M مودول R نوع محدود نامیده می شود اگر که توالی دقیق از w باشد، در جاییکه F1 , F0 هر دو متغیر آزادی باشند که به طور محدود ایجاد شده اند.

M مودول R ، مودول تخت w نامیده می شود اگر نقشه استقرایی  یک مونومورفیسم w برای هر مونومورفیسم w باشد. به طور خاص، مودول تورشن GV تخت w خواهد بود.

نظریه 2.1. (8 قضیه 3.3). عبارات زیر معادل مودول M است:

1). M تخت w است.

2) برای هر توالی دقیق w، توالی  دقیق[[16]](#footnote-17) w است.

* یک مودول تخت برای هر m ایده آل حداکثر از R است.

 یک مودول تورشن GV برای هر N مودول R است.

 مودول تورشن GV برای هر N مودول R و برای هر  است.

هومومورفیسم طبیعی  یک ایزومورفیسم برای هر I ایده آل از R است.

هومومورفیسم طبیعی  یک ایزومورفیسم w برای هر ایده آل I محدود از R است.

هومومورفیسم طبیعی  یک مونومورفیسم w برای هر هر ایده آل I محدود از R است.

هومومورفیسم طبیعی  یک مونومورفیسم w برای هر هر ایده آل I از R است.

یادآوری: نظریه مودول های تخت w در ابتدا در مطالعه 16 بیان شد که در آن مودول آزاد از تورشن M در حوزه R تخت w نامیده می شد اگر Mm مودول Rm تخت برای هر ایده آل w حداکثر از R باشد. از قضیه 2.1 می بینیم که این نظریه بسط داده شده است. برای مثال فرض کنید که R حوزه باشد و فرض کنید که J یک ایده آل GV از R باشد ، به گونه ای که . بنابراین R/J تورشن GV است و بنابراین مودول تخت w راداریم که آزاد از تورشن نیستند.

قضیه 2.2. (8 قضیه 3.4). فرض کنید که  دقیق w باشد در جاییکه F یک مودول تختw آزاد از تورشنGV باشد و A یک زیر مودول از F باشد. سپس عبارت های زیر معادل خواهند بود با :

1. M یک تخت W است.
2.  برای هر ایده آل I از R .
3.  برای هر ایده آل I ایجاد شده محدود از R.

قضیه 2.3. (8 قضیه 3.9) . فرض کنید که M یک مودول R است و فرض کنید که  یک سیستم مستقیم از زیر مودول تخت w از M در شاخص مجموعه شاخص های مستقیم  است. سپس  یک تخت W است.

فرض کنید که M مودول R است و . به یاد آورید که در 20 ، Mتصویری-wنامیده می شود اگر  یک تورشن GV برای هر مودول-wآزاد از تورشن N باشد. وقتی M متناهی است داریم Mتصویری-wاست اگر و تنها اگر  یک تورشن GV برای هر مودول-wآزاد از تورشنN باشد (مراجعه به 20، قضیه 2.16).

قضیه 2.4. . هر مودول تصویری-wیک تخت w است.

اثبات

این امر از 20، قضیه 2.5 و از قضیه 2.2 گرفته شده است.

ما نتایج مودول های تصویری-wرا برای استفاده های بعدی در نظر می گیریم.

قیاس 2.5. (20 قضیه 2.3). فرض کنید که M , M’ مودول های R باشند و فرض کنید که  ، یک ایزومورفیسم w باشد. سپس Mتصویری-wخواهد بود اگر و تنها اگر M’ تصویری wباشد.

قیاس 2.6. (20 قضیه 2.18). هر مودول تصویری-wاز نوع متناهی یک نوع ارائه شده متناهی است.

قیاس 2.7( 20 قضیه 2.17). فرض کنید که  یک توالی دقیق w باشد. اگر A و Cتصویری-wاز نوع متناهی باشد سپس Bتصویری-wاز نوع محدود است.

قضیه 2.8 (20 نظریه 2.7). فرض کنید که M مودول R از نوع ارائه شده متناهی باشد. سپس Mتصویری-wخواهد بود اگر  آزاد از هر ایده آل m از R حداکثر باشد.

3. مودول های تزریقی w

در این بخش ما مفهوم مودول های تزریقی-wرا بیان کرده و ویژگی های آنان را شرح می دهیم.

تعریف 3.1. E مودول Rتزریقی-wاست اگر :

 دقیق w باشد برای هر توالی دقیق w

مثال 3.2. به طور خاص اگر ، یک ایزومورفیسم باشد، سپس Mتزریقی-wاست اگر و تنها اگر Nتزریقی-wباشد. به طور خاص مودول های تورشن GVتزریقی-wهستند. بنابراین مودول تزریقی-wضرورتا مودول تزریقی است.

در ادامه، ما ویژگی هایی از مودول های تزریقی-wاشاره می کنیم که مشابه با همان مدل های تزریقی است.

قضیه 3.3. عبارات زیر معادله Eمودول-wاست.

1. Eتزریقی-wاست.
2.  دقیق wاست برای هر توالی دقیق 
3.  یک تورشن GV برای هر M مودول است.
4. یک تورشنGV برای هر M مودول و برای هر عدد صحیح بزرگتر از 1 است.

اثبات . . چون Eمودول-wاست، داریم .

. فرض کنید که  دقیق باشد، در جاییکه F آزاد است. این امر قابل مقایسه با توالی دقیق w است که  است و توالی دقیق 

 فرض کنید که  دقیق w باشد.  و .سپس  دقیق است و  تورشن GV است. در نتیجه 

دقیق است و  خواهد بود و داریم 

فرض کنید که  . سپس A1 تورشن GV است و  دقیق است. با همان ادعا، خواهیم داشت .

فرض کنید که . سپس  دقیق است. بنابراین دقیق است. به یاد داشته باشید که ‌یک تورشن GV است. بنابراین داریم . بعلاوه  دقیق w است.

 فرض کنید که ‌باشد و فرض کنید که  دقیق باشد در جاییکه F آزاد است. سپس خواهد بود. بعلاوه  تورشن GV با استقراست.

بدیهی است.

استنباط 3.4. مودول Eتزریقی-wاست اگر و فقط اگر  تورشن GV برای هر مودول M باشند. اگر و تنها اگر  تورشن GV برای هر مودول M باشد و برای همه .

استنباط 3.5. فرض کنید که E یک مودول تزریقی آزاد از تورشنGV باشد. سپس E یک مودول-w تزریقی-wخواهد بود.

در 21 ، قضیه 1.3.1. ، نشان داده شده است که N مودول R تورشن GV است اگر و تنها اگر  برای هر E مودول آزاد از تورشنGV صادق باشد( به یاد داشته باشید که این نتیجه در نظریه تورشن به خوبی آمده اس). همچنین می دانیم که نظریه تورشن موروثی  و N ماژوا Rتورشن است اگر و تنها اگر  باشد برای هر مودول آزاد از تورشن از مودول M. (6، فرضیه 1.2). نتیجه بعدی متفاوت از این نتایج است.

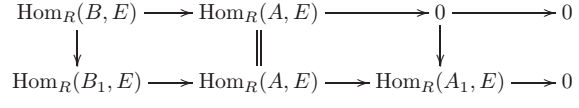
نظریه 3.6. N مودول R یک تورشنGV است اگر و تنها اگر  برای هر Eمودول-w تزریقی-wصدق کند.

اثبات . به طور خاص اگر Eمودول-wتزریقیw باشد و N تورشن GV باشد، سپس  خواهد بود. برعکس . سپس C آزاد ار تورشنGV خواهد بود. در 19 ، قضیه 1.1. ،  همچنین آزاد از تورشنGV است. بعلاوه E یک مودول-w تزریقی-wاست که توسط 3.5 استنباط شد. بنابراین با توجه به فرضیات خواهد بود. چون  دقیق است و داریم  و بعلاوه نقشه شامل بودن ‌یک هومومورفیسم صفر است. بنابراینc=0 خواهد بود و بعلاوه N تورشن GV است.

به خوبی شناخته شده است که E مودول R تزریقی است اگر و تنها اگر  یک عامل دقیق باشد. نتایج متناظر برای مودول های تزریقی-wبه شکل زیر است:

قضیه 3.7. توالی  دقیق w است اگر و تنها اگر برای هر Eمودول-w تزریقی-w، توالی  دقیقwباشد.

اثبات . کافی است بخش اگر را اثبات کنیم. اگر  سپس  دقیق خواهد بود . بعلاوه توالی  و  دقیقwخواهد بود. نمودار تبدیل زیر را با سطرهای دقیق w در نظربگیرید.



سپس  یک مودول تورشن GV با قیاس پنجw(مراجعه به 19، قیاس 1.1.) . هم اکنون ما نشان می دهیم که A1 یک تورشن GV است. در نظر بگیرید  و . سپس



دقیق است. در قضیه 3.6  خواهد بود. چون  تورشن GV است.  یک تورشن GV است. به طور خاص تزریق متعارف i خواهد بود :  که یک عنصر تورشنGV است. بنابراین است. بعلاوه A1 یک تورشن GV است. بنابراین  دقیقwاست.

قیاس تولید تزریقی بیان می کند که اگر M یک مودول R تخت باشد و N یک مودول R تزریقی باشد ، سپس  تزریقی است. در زیر بحث نظری از wدر این نتایج آمده است.

قضیه 3.8. فرض کنید که تختwباشد و فرض کنید که E یک مودول-wتزریقی wباشد. سپس تزریقی-wخواهد بود.

اثبات : فرضکنید که  دقیقwباشد. سپس  دقیقwاست چون M تختwاست. چون Eمودول-w تزریقی-wاست، داریم:

 دقیقwاست با توجه به قضیه 3.3. به یاد داشته باشید که  همچنین یک مودول-wاست. با توجه به قضیه ایزومورفیسم پیوسته ، تزریقی-wاست. ما می گوییم که M مودول از R قابل تقسیم است اگر M=sM برای همه مقسوم علیه غیر صفر S برای R .

فرضیه 3.9. فرض کنید که E یک مودول-w تزریقی-wاست سپس E قابل تقسیم است.

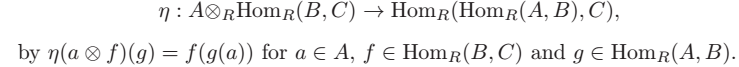
اثبات . فرض کنید که s یک تقسیم کننده غیر صفر از R است. سپس  با توجه به قضیه 3.3. یک تورشنGV است. چون s یک تقسیم کننده غیر صفر است، sE همچنین یک مودول-wاست. با توجه به 14 و 22، قضیه 2.7،  آزاد از تورشنGV است که در  کاربرد دارد که هست  ، بعلاوه E قابل تقسیم است.

در 1 ، نشان داده شده است که حوزه R فقط و فقط زمانی قابل تقسیم است که مودول-wتزریقی باشد. بعلاوه در زیر داریم:

استنباط 3.10 . اگر R یک دامنه کرول [[17]](#footnote-18) باشد، سپس هر مودول-w تزریقی-wتزریقی است.

با ترکیب استنباط 3.10 با استنباط 3.5 می توان حوزه های کرول را برای همه مودول هایwتزریقی-wدر نظر گرفت و طبقه همه مودول های تزریقی آزاد از تورشنGV یکسان خواهد بود.

فرض کنید که A,B,Cمودول های R باشد. هومومورفیسم طبیعی را در نظر بگیرید:



قیاس 3.11. فرض کنید که A متناهی است.

1. اگر A تصویری باشد سپس  ایزومورفیسم است.
2. اگر Cمودول-w تزریقی-wباشد ، سپس  اپیمورفیسمwاست.

اثبات 1. به خوبی شناخته شده است.

1. فرض کنید که  دقیق است، در جاییکه F متغیر آزاد متناهی است. سپس  دقیق است. چون Cمودول-w تزریقی-wاست، نمودار تبدیل زیر را با سطر های دقیقwخواهیم داشت.



بعلاوه ، باتوجه به قیاس 1.1. یک اپیمورفیسمwاست.

قیاس 3.12. فرض کنید که S مجموعه همه مقسوم علیه های غیر صفر از R باشد. فرض کنید که M یک مودولR آزاد از تروشن است همچون Ms است که یک مودول تصویری T(R) است.

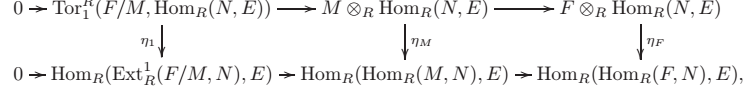
1. FمودولR آزاد متناهی وجود دارد همچون ‌و  یک مودول T(R) تصویری است.
2. اگر M تختwباشد، N یک مودول مقسوم علیه است و E یک مودول-w تزریقی-wاست، سپس



یک ایزومورفیسمwاست. بعلاوه تورشنGV است.

اثبات 1. چون Ms یک مودول تصویری است، Ms تشکیل دهنده یک مودول  آزاد متناهی است که در آن  است برای هر Nمودول. فرض کنید که  پایه  از G باشند.  خواهد بود. بنابراین f یک مودول آزاد است و Fs=G است. چون M متناهی است  است که در آن  است. چون M آزاد از تورشن است،  یک مونومورفیسم است و  یک مودول T(R) تصویری است.

2. با توجه به 1 ، ما توالی دقیق  را داریم در جاییکه F آزاد متناهی است و  مودول T(R) تصویری است. بعلاوه  دقیق است. بنابراین نمودار مبادله زیر دارای سطرهای دقیق خواهد بود.

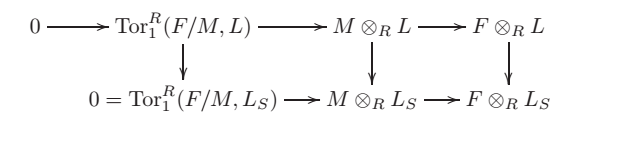


در جاییکه  ایزومورفیسم است و  اپیمورفیسمwاست با توجه به قیاس 3.11. بعلاوه  اپیمورفیسمwاست.

فرض کنید که L یک مودول آزاد از تورشن است. سپس  دقیق است. چون Ls یک مودول T(R)است،  یک مودول T(R) است. بنابراین داریم :



سپس نمودار مبادله زیر با سطرهای دقیق را داریم :



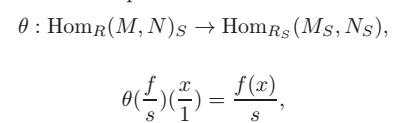
چون M تخت W است،  یک مونومورفیسم wاست و



یک تورشنGV برای هر Lمودول آزاد از تورشن است. چون N قابل تقسیم است، معمول است که  آزاد از تورشن است. بعلاوه

تورشنGV است. بنابراین یک مونومورفیسمwاست.

فرض کنید که M و N مودول R است. فرض کنید که S مجموعه بسته تکثیری از R است. در نظر بگیرید که هومومورفیسم طبیعی به شکل زیر باشد:



برای . مشخص است که اگر M متناهی باشد، سپس  مونومورفیسم است و اگر M متناهی نشان داده شود سپس  ایزومورفیسم است.

قیاس 3.13. (18 ، قضیه 3.4.8.)

فرض کنید که S مجموعه همه مقسوم عیله های غیر صفر از R است. اگرM متناهی باشد و N آزاد از تورشن است، سپس  ایزومورفیسم است.

قضیه 3.14. (20، قضیه 3.12). فرضکنید که M یک مودول تصویری-wاز نوع متناهی است و فرض کنید که  ایده آل w اولیه از R است. فرض کنید که  است. اگر N یک مودول-wآزاد از تورشن باشد، سپس  ایزومورفیسم خواهد بود.

قیاس 3.15 (2 ، قضیه 2.8). فرض کنید که M مودول است و فرض کنید که N یک مودول-wاست. سپس مودول-wاست . بخصص مودول انعکاسی که از مودول های w است.

قیاس 3.16( 20 ، قضیه 1.6). فرض کنید که M یک مودول متناهی است و فرض کنید که N یک مودول آزاد از تورشنGV است. سپس .

قیاس 3.17. فرض کنید که S مجموعه ای از مقسوم عیله های غیر صفر از R باشد و فرض کنید که N یک مودول-wآزاد از تورشن است. سپس Ns مودول Rمودول-wاست. به طور خاص T(R) یک مودول-wاست.

اثبات . چون Ns بسط ضروری از n باشد، داریم ، فرضکنید . چون j متناهی است،  با  ست. بنابراین  است و بعلاوه  است.

قیاس 3.18 فرض کنید که s مجموعه ای از مقسوم علیه های غیر صفر از R است و فرض کنید که Nمودول-wدر T(R)است. سپس N مودول R از مودول-wاست.

اثبات. فرض کنید که N به طور خاص یک مودول R آزاد از تورشنGV است چون  برای هر . فرض کنید که E یک متغیر تهی تزریقی از N است همچون مودول R . فرض کنید که  و  با  باشد. سپس . بعلاوه، با توجه به فرضیه داریم . بنابراینN مودول R است که یک مودول-wاست. بنابراین N یک مودول R از مودول-wاست.

قضیه 3.19. فرض کنید که S مجموعه ای از مقسوم علیه های R باشد و فرض کنید که B یک مودول متناهی باشد.

1. اگر Bتصویری-wاست ، سپس BsمودولT(R)تصویری-wاست.
2. اگر B تختwو آزاد ازتورشن است، و BsمودولT(R)تصویری است ، سپس B یک مودولRتصویری-wاست

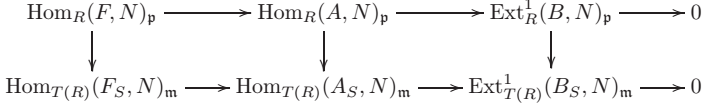
اثبات 1. فرض کنید که N یک مودول-wبرای T(R)است. سپس N یک مودولR است که بر اساس قیاس 3.18 مودول-wآزاد از تورشن است. برای هر XمودولR ، مشخص است که .

فرض کنید که m ایده آلwحداکثر از T(R)باشد و  باشد. سپس ایده آلwاولیه از R است و  است. بعلاوه  خواهد بود. بنابراین داریم  که مشخص می کند که برای LمودولT(R)خواهیم داشت .

فرض کنید که Y نوع متناهی باشد. سپس زیرمودول متناهی Z از Y به شکل تورشن GV خواهد بود. به یاد داشته باشید که  است، برای هر . بعلاوه  تورشن GV در T(R)است. بنابراین‌و . با توجه به 3.13 داریم :



فرض کنید که  یک توالی دقیق باشد، در جاییکه F آزاد متناهی است. با قیاس 2.6 A نوع متناهی خواهد بود. نمودار تبدیل با سطرهای دقیق زیر را درنظر بگیرید:



دو پیکان عمودی در سمت چپ ایزومورفیسم است که به شکل بالاست. بعلاوه پیکان های عمودی در سمت راست نیز ایزومورفیسم است. بنابراین

تورشن GV برای T(R) است. بنابراینBs یک تصویرwدر T(R) است.

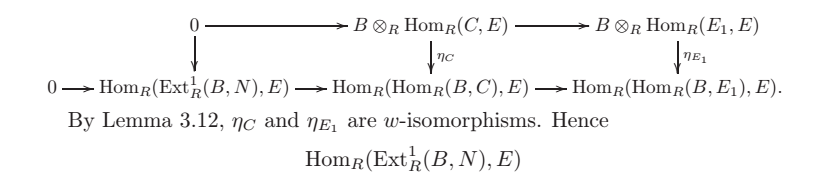
1. فرضکنید که N یک مودول-wآزاد از تورشن است و فرضکنید که  دقیق است در جاییکه E1 یک متغیر تهی تزریقی از N است. سپس C و E1 آزد تورشنGV و قابل تقسیم است. سپس توالی زیر را خواهیم داشت



دقیق است. فرض کنید Eمودول-w تزریقی-wاز R است. سپس



دقیقwاست. چون B تختwاست، ما نمودار مبادله زیر را با سطرهای دقیقwداریم :



تورشنGV است. بنابراین  با توجه به قضیه 3.6 تورشنGV است. بنابراینB یک تصویرwاست.

1. نیم حلقه های موروثی

به یاد آورید که حلقه نیمه موروثی حلقه ای است که در آن همه ایده آل های نامتناهی غیر صفر تصویری هستند. به خوبی مشخص است که در این حوزه، ایده آل فقط و فقط زمانی تصویری است که معکوس پذیر باشد. بنابراین حوزه نیمه موروثی ، حوزه پوفر است که به مفهوم PVMDS تعمیم داده شده است. این حوزه PVMD است اگر همه ایده آل های متناهی از نظر T معکوس پذیر باشد ، که به طور معادل از نظرwنیز معکوس پذیراست. در این بخش ما این مفهوم را به حلقه های تبدیل با مقسوم علیه های صفر تعمیم می دهیم و ویژگی های برخی از حلقه های مرتبط را درک می کنیم.

قیاس 4.1. 1. فرض کنید که حقله کاهش  باشد و فرض کنید که A و B ایده آل های R است. سپس  خواهد بود اگر و تنها اگر  باشد.

1. اگر Rm حوزه ای برای هر ایده آل w حداکثر از R باشد، سپس R کاهشی خواهد بود.

اثبات . 1) فرض کنید که AB=0 فرض کنید که ، سپس  است. بنابراین داریم X=0 چون R کاهشی است.

2. فرض کنید که  است . سپس با توجه به فرضیه برای هر ایده آلwحداکثر از R خواهد بود. بعلاوه N ، تورشنGV است. چون آزاد از تورشنGV خواهد بود  است.

قیاس 4.2. . فرض کنید که محصول تجزیه از حلقه هاست .

1. فرض کنید  یک ایده آل از R است. سپس  خواهد بود اگر و فقط اگر  برای هر .
2. فرض کنید که  یک مودول R آزاد از تورشنGV است. سپس  یک متغیر آزاد از تورشنGV است  و  . در جاییکه  به پوشwاز Mi در Ri اختصاص دارد.

اثبات . این روتین است.

قیاس 4.3. فرض کنید که 

1. اگر a مقسوم علیه صفر باشد، سپس 
2. اگر a واحد نباشد، سپس  خواهد بود. به بیان دیگر اگر ، سپس a واحد است و بنابراین است.

اثبات . 1 ) چون a مقسوم علیه صفر است ،  است. بنابراین.

2. اگر a یک مقسوم علیه غیر صفر باشد، سپس مشخص است که  است. اگر a مقسوم علیه صفر باشد، سپس با توجه به 1 ،  است. چون  یک ایده آلwاز R است، بنابراین خواهیم داشت .

هم اکنون ویژگی های جدیدی از حلقه های منظم  را بیان می کنیم.

قضیه 4.4. عبارات زیر معادل با حلقه R هستند:

1. R یک حلقه ون نیومن منظم است.
2. هر مودولR یک تخت W است.
3. برای هر  داریم .
4. اگر I یک ایده آل محدود از R باشد، سپس  خواهد بود.
5.  حوزه ای برای هر ایده آلwحداکثر  است.

اثبات.  برای هر چون ‌، تختwاست و  دقیق است. بر اساس فرضیه 2.2 داریم  بعلاوه .

 بر اساس فرضیات، داریم . بعلاوه  یک حلقه منظم داخلی ون نیومن است. بعلاوه  یک حوزه است.

. این امر پیرو قضیه 2.1 است.

 فرض کنید که  باشد. سپس  خواهد بود که درآن برای هر I خواهیم داشت. ‌. بنابراین.

. اینها بدیهی است .

 با قضیه 4.1. R کاهشی است. فرض کنید که  باشد و  سپس  خواهد بود همچون . بنابراین برای هر  و برای هر  داریم. بعلاوه ، خواهد بود که در آن  است. سپس ، که بیان می کند که یک عنصر idempotent برای e است. پس داریم . سپس R1 حلقه ای با هویت e است.  به پوشwاز ایده آل i از R1  است. با قضیه 4.3.  است. بعلاوه R یک حلقه منظم ون نیومن است.

از قضیه 4.4. ضروری است تا حلقه های منظم ون نیومن را تعریف کرد.

تعریف 4.5. حلقه R گقته می شود که نیمه موروثی است اگر که ایده آل نوع متناهی R ، تصویری-wباشد که به طور معادل هر ایده آل متناهی از Rتصویری-wاست.

به طور خاص، حلقه های نیمه موروثی و PVMD (حوزه های تکثیرwپروفر) نیمه موروثی-wاست. بر اساس 19، MمودولR است که منسجمwاست اگر M نوع متناهی باشد و هر مودول فرعی متناهی از M نوع ارائه شده متناهی است. حلقه R منسجمwنامیده می شد اگر منسجمwیک مودولR باشد. همچنین نشان داده شده است که یک حلقه R منسجم است اگر وتنها اگر هر زیر مودول نوع متناهی از مودول آزاد از نوع ارائه شده متناهی باشد. چون مودولتصویری-wنوع متناهی از نواع ارائه شده متناهی قیاس 2.6 است، هر حلقه نیمه موروثی-wمنسحمwاست .

فرضیه 4.6( 20، فرضیه 2.9). فرض کنید که I یک ایده آل پوج غیر صفر از R است. سپس Iتصویری-wنیست.

استنباط 4.7. . فرض کنید که Rنیمه موروثی-wاست. سپس R کاهشی خواهد بود.

اثبات . فرض کنید که u یک عنصر پوچ از R باشد. سپس  بنابر فرضیه تصویرwاست. بعلاوه I=0 خواهد بود بنابر فرضیه 4.6 . بعلاوه u=0 است.

فرضیه 4.8. فرض کنید که  باشد. سپس Rنیمه موروثی-wخواهد بود اگر و تنها اگر R1 و R2نیمه موروثی-wباشند.

اثبات: این امر مشخص است.

سپس ما شباهت عملیاتwاز حلقه ها را با ابعاد ضعیف جهانی کمتر و یا معادل با 1 بررسی می کنیم. ابعاد جهانی ضعیف تخت بودن مودول ها را در R بررسی می کنند. خصوصیات کمی از حلقه ها با ابعاد جهانی ضعیف کمتر و یا مساوری با 1 در مطالعات 4 و 12 بدست آمده است. در زیر شباهت نظریwدر این نتایج بیان شده است.

قضیه 4.9. عبارات زیر برای حلقه R معادل است.

1. هر زیر مودول از مودول تختw، تختwاست.
2. هر زیرمودول نوع متناهی از مودولتختw، تختwاست.
3. هر زیر مودول متناهی از مودول تختw، تختwاست.
4. هر ایده آل از R ، تختwاست.
5. هر ایده آل نوع متناهی از R، تختwاست.
6. Rm یک حوزه ارزش گذاری برای هر ایده آلwحداکثر است.

اثبات

بدیهی است

 فرض کنید که i ایده آل R ست. سپس  خواهد بود، در جاییکه B محدوده ای از مجموعه همه زیر ایده آل های متناهی از I را خواهد داشت. بعلاوه Iبر اساس فرضیه 2.3. تختwاست.

 فرض کنید که I هر ایده آل از R است. سپس I تخت w است. بعلاوه  ایده آل تخت از  است که برای هر ایده آل از  که تخت است کاربرد دارد. سپس  یک حوزه ارزشگذاری است.

 مشخص است

بدیهی است.

فرض کنید که حلقه مبادله R یک حلقه با  است اگر هر شرایط معادل از قضیه 4.9. برآورده شود. در حقیقت برای مبادله حلقه R ، می تواند به طور مشابه با جانشینی زیر تعریف کرد: مودول تخت (مودول تخت w ) و ابعاد تخت ( ابعاد تخت w).

استنباط 4.10 . فرض کنید کهR یک حلقه نیمه موروثی باشد. سپس هر ایده ال از R تختwاست.

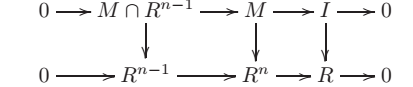
اثبات: این امر پیرو فرضیات 2.4 و قضیه 4.9 است.

چندین خصوصیت برای حلقه های نیمه موروثی درادبیات بیان شده است. (2و4و7و12). به طور خاص، مشخص است که R نیمه موروثی است اگر و تنها اگر هر زیر مودول ایجاد شده متناهی از مودول تصویری ، تصویری باشد. (4، قضیه 1.4.3.). و R نیمه موروثی است اگر و فقط اگر T(R) یک حلقه منظم ون نیومن است و Rm حوزه ارزش گذاری برای هر ایده آل حداکثر m از R است( 2، قضیه 2). قضیه 4.14 و آنچه در زیر آمده است شباهت نظریwاز این ویژگی هاست.

قضیه 4.11. عبارات زیر برای حلقهR بکار برده می شود.

1. Rنیمه موروثی-wاست.
2. هر زیر مودول نوع متناهی از مودول آزاد، تصویری-wاست.
3. هر زیر مودول ایجاد شده متناهی از مودول آزاد تصویری-wاست.
4. هر ایده آل ایجاد شده متناهی از Rتصویری-wاست.

اثبات.  فرض کنید که F یک مودول آزاد است و فرض کنید که M یک زیر مودول نوع متناهی از f است. بدون از دست دادن نقاط تعمیم فرض می کنیم که  یک متغیر ایجاد شده متناهی است. این امر در استقرا n مشخص می شود. اگر  باشد، سپس M یک ایده آل نوع متناهی از R است. بعلاوه Mتصویری-wاست. فرض کنید که  است. فرض کنید که  ؛ n امین تصویر است و داریم . بنابراین I نوع محدود است که در 19، فرضیه1.3 آمده است. نمودار مبادله زیر را با سطرهای دقیق در نظر بگیرید:



چون Iتصویری-wاست و I نوع ارائه شده متناهی از قیاس 2.6 باشد،  نوع متناهی است. سپس  تصویرwتوسط استقراست. بعلاوه M یک تصویرwاست با توجه به قیاس 2.7.

 این امر بدیهی است

فرض کنید که I ایده آل نوع محدود از R باشد. سپس I ، ایزومورفیکwاست که زیر ایده آل ایجاد شده محدود B از I است. بعلاوه Iتصویری-wاست بنابر فرضیات و قضیه 2.5.

قضیه 4.12 . فرض کنید که R حلقه ای باشد که Rm حوزه ای برای ایده آلw  باشد. فرضکنید که عنصر غیر صفر از R باشد و داشته باشیم . اگر I نوع محدود باشد سپس I توسط عنصر Idempotent ایجاد شده است.

اثبات .  است. بنابراین  باشد و بنابراین  باشد بنا به قیاس4.1. بعلاوه یک ایده آلwاز R است. اگر  باشد، سپس ایده آلwحداکثر  است ، چون  است. به یاد داشته باشید که  در Rm است ، در غیر اینصورت  وجود دارد همچون . و بعلاوه  خواهد بود. بنابراین  خواهد بود اگر Rm حوزه باشد. چون I ایده آلwنوع متناهی باشد، SI=0 خواهد بود برای که در آن  است، که متضاد با  است. سپس  خواهد بود. این امر با اثبات کامل می شود.

قضیه 4.13. فرض کنید که R یک حلقه نیمه موروثی-wباشد. اگر هر مقسوم علیه غیر صفر از R واحد باشد، سپس R یک حلقه منظم ون نیومن است.

اثبات . اگر R یک حلقه منظم ون نیومن نباشد، سپس ایده آلwحداکثر از ‌خواهیم داشت که Rm آن در محدوده نخواهد بود. بنابراین زیر ایده آل اولیه  از m وجود دارد که در آن داریم  . فرض کنید که  باشد با  و بنویسیم . سپس  دقیق است. چون Rنیمه موروثی-wاست. سپس I یک نوع متناهی است. چون هر نوع داخلی از R در ایده آلwحداکثر  یک حوزه ارزش گذاری برای قضیه 4.9 است، داریم برای هر عنصر Idempotent که e در آن توط قضیه 4.12 بیان می شود. در نتیجه داریم . توسط ، داریم . بعلاوه ‌خواهد بود، بنابراین s یک واحد نیست.

همچون آنچه در قیاس 4.1 آمده است  است. فرض کنید که  با  است. چون ‌داریم  بنابراین  خواهد بود، درجاییکه  است. بنابراین s مقسوم علیه غیر صفر است. بنابراین s بنا به فرضیات یک واحد متناقض است. بعلاوه Rm یک حوزه است. بنابراین Rیک حلقه منظم ون نیومن است که در قضیه 4.4. بدان اشاره شده است.

قضیه 4.14. عبارات زیر معادل با حلقه R است:

1. Rنیمه موروثی-wاست.
2. T(R)یک حلقه منظمون نیومن و Rp است که حوزه ارزش گذاری برای هر ایده آلن اولیهw  است.
3. T(R)یک حلقه منظم ون نیومن و Rm یک حوزه ارزش گذاری برای هر ایده آلwحداکثر  است.
4. R یک حلقه منسجمwبا  است.

اثبات:  با استنباط 4.10 و قضیه 4.9 ، کافی است که نشان داد که T(R)یک حلقه منظم ون نیومن است. فرض کنید که S مجموعه ای از همه مقسوم علیه های غیر صفر از R است. سپس  است. فرض کنید که A ایده آل ایجاد شده متناهی از T(R) است. سپس ایده آل ایجاد شده متناهی B از R در چنین حالتی  است. فرض کنید که m ایده آل حداکثرwاز T(R)است و  است، سپس  است. بعلاوه  ایده آلwحداکثر از T(R) است و  . سپس  است. بعلاوه  و  است. سپس  است، چون‌یک حوزه ارزش گذاری است،  آزاد از است. با فرضیه 2.8 ، Bتصویری-wاز R است. در نتیحه Aتصویری-wاز T(R)است بنا بر قضیه 3.19 بعلاوه T(R)یک نیمه موروثی-wاست بنابر قضیه 4.13 و T(R)یک حلقه منظم ون نیومن است.

بدیهی است .

 فرض کنید که I ایده آل ایجاد شده متناهی از R است. برای هر ایده آلwحداکثر  است و lm آزاد است چون بنابر فرضیه مودول  را خواهیم داشت. بعلاوه I یک ایده آل تختwاست. چون  یک حلقه منظم ون نیومن است ، ‌یک ایده آل تصویری از  است. با توجه به قضیه 3.19 ، Iتصویری-wاست و بعلاوه Rنیمه موروثی-wاست.

 تایید اولیه در این امر قبل از فرضیه 4.6 آمده است، در حالیکه تایید دوم به دنبال قضیه 4.9 و  بیان می شود.

 فرض کنید که I ایده آل نوع متناهی از R باشد. سپس با توجه به قضیه 4.9 ، I تختwاست. چون  است، بنابر قضیه4.9 ،  یک حوزه ارزش گذاری برای هر ایده آلwحداکثر  است. بنابراین IM آزاد از Rm است برای هر ایده آلwحداکثر . بعلاوه چون R منسجمwاست، I نوع ارائه شده متناهی است. بنابراین بر اساس فرضیه 2.8 ، Iتصویری-wاست و بنابراین Rنیمه موروثی-wاست.

به یاد داشته باشید که حلقه R مرتبط خواهد بود اگر  مرتبط با فضای نمونه باشد.

قضیه 4.15. فرض کنید که R حلقه مرتبط است. سپس R یک متغیر نیمه موروثی-wاست اگر و تنها اگر R یک PVMD باشد.

اثبات : فرض کنید که R یک حلقه نیمه موروثی-wمرتبط باشد. کافی است نشان داده شود که R یک حوزه است. فرض کنید که a ک عنصر غیر صفر است و داریم . چون Raتصویری-wایجاد شده متناهی است، I نوع متناهی ز قیاس 2.6 است. بعلاوه I توسط عنصر Idempotentتوسط قیاس 4.12 ایجاد شده است. چون R مرتبط است و ، داریم e=0 و بعلاوه I=0 است بعلاوه R یک حوزه است.

پیرو مطالعات لوکاس (9و10و1)، را به حلقه کسر متناهی از R اختصاص می دهیم. در 20، A مودول R گقته می شود که رتبه n ازwرا دارد اگر بری هر ایده آلwحداکثر  داشته باشیم . و به یاد داشته باشیم که A مودول R گفته می شود که معکوس پذیرwاست اگر نقشه مسیر  یک ایزومورفیسمwباشد. در 20، نشان داده شده است که A معکوس پذیرwاست اگر و تنها اگر M نوع متناهی است و رتبهw1 دارد ، که برای هر ایده آلwحداکثر ، داریم . اگر A یک زیر مودول  باشد، سپس A نسبت بهwمعکوس پذیراست اگر و تنها اگر زیر مودول  ،  باشد.

فرضیه 4.16 . عبارت های زیر معادل با حلقه مبدل R است.

1. هر ایده آل نوع متناهی غیر صفر از R از نظرwمعکوس پذیراست.
2. هر ایده آل ایجاد شده متناهی غیر صفر از R معکوس پذیرwاست
3. هر مودول آزاد از تورشن نوع محدود غیر صفر یک تصویرwاست و رتبهwمتناهی دارد
4. هر مودول آزاد از تورشن ایجاد شده متنهای غیر صفر یک متغیر تصویری-wبا رتبهwمتناهی است.
5. R یک PVMD است.

اثبات: . این امرپیرو (20 قضیه 4.15 خواهد بود. )

بدیهی است.

 فرض کنید که عنصر غیر صفر از R و ‌را داشته باشیم. سپس Ra یک متغیر تصویری-wاست و . سپس داریم ‌که وقتی بکار برده می شود که  است ، چون I یک مودول-wاست. بنابراینR یک حوزه است و بعلاوه R یک PVMD است.

. ان امر پیرو 17 قضیه 3.9 است.

1. commutative [↑](#footnote-ref-2)
2. module [↑](#footnote-ref-3)
3. w-projective [↑](#footnote-ref-4)
4. torsion [↑](#footnote-ref-5)
5. torsion-free [↑](#footnote-ref-6)
6. injective [↑](#footnote-ref-7)
7. total quotient ring [↑](#footnote-ref-8)
8. von Neumann [↑](#footnote-ref-9)
9. Pr¨ufer v-multiplication domain [↑](#footnote-ref-10)
10. envelope [↑](#footnote-ref-11)
11. commutative rings withzero divisors. [↑](#footnote-ref-12)
12. Half- regular [↑](#footnote-ref-13)
13. torsion-free [↑](#footnote-ref-14)
14. flat [↑](#footnote-ref-15)
15. Quotient [↑](#footnote-ref-16)
16. exact [↑](#footnote-ref-17)
17. krull [↑](#footnote-ref-18)